Vektorski autoregresioni model (VAR model): osnove

Uvod

- Najveći broj makroekonomskih vremenskih serija ispoljava vremensku zavisnost. To iziskuje formulaciju modela koja treba da omogući analizu dinamičkih odnosa između promenljivih. Forma VAR modela je upravo takva.
- Osnovna svojstva VAR modela su:
  - dinamički odnosi su kompletno zastupljeni, jer se svaka promenljiva modelira prema sopstvenim prethodnim vrednostima, kao i prethodnim vrednostima ostalih promenljivih u sistemu,
  - ne postoji prethodno definisana podela na endogene i egzogene promenljive i
  - ne postavljaju se ograničenja na parametre modela, izuzev ograničenja o njihovoj linearnosti.
- VAR model predstavlja alternativni okvir modeliranja u odnosu na klasičan sistem simultanih jednačina.

VAR model i makroekonometrijska analiza

1. Predstavlja osnov za definisanje fundamentalnih statističkih koncepata koji danas čine elementarno oruđe u ekonometrijskim istraživanjima: kointegracija i uzročnost.
2. Ekonomska primena sastoji se u analizi efekata ekonomske politike na bazi korišćenja metoda dekompozicije varijanse greške predviđanja i funkcije impulsnog odziva.
3. Kako je opis dinamičkih odnosa u VAR modelu sadržajan, ekonometrijska analiza može otvoriti i neka ekonomska pitanja koja prethodno nisu teorijski postavljena. VAR model omogućava interakciju između teorijskih i empirijskih zavisnosti.

- Juselius (2006): VAR model omogućava podacima da slobodno govore

Neke od ključnih faza u primeni VAR modela

1. Specifikacija i ocena parametara
2. Računanje funkcije impulsnog odziva i
3. Dekompozicija varijanse greške predviđanja.

1. Specifikacija i ocena parametara

- Cilj: utvrditi da li su dinamički odnosi promenljivih zastupljeni u celini.
  - Proveriti da li je broj uključenih vremenskih docnji optimalan (stohastička komponenta ne sadrži sistematske uticaje, koji bi se reflektovali na postojanje autokorelacije)
  - Proveriti da li je slučajna greška aproksimativno normalno raspodeljena, jer u protivnom VAR model nije dobro postavljen.
  - Analiza se bazira na upotrebi velikog broja statističkih testova.
- Broj docnji je rezultat samo statističke analize, jer ekonomska teorija o tome obično ne pruža dovoljno informacija.
- Kada se utvrdi da je model korektno specifikovan, onda se jednačine modela mogu oceniti primenom metoda ONK.
  - Ne postoji problem simultane međuzavisnosti.

2. Funkcija impulsnog odziva

- Formulacija VAR modela može se transformisati tako da data promenljiva bude funkcija tekućih i prethodnih vrednosti slučajnih komponenti svih promenljivih u modelu . To je vektorska forma pokretnih proseka.
- Ocene parametara u formi pokretnih proseka čine funkciju impulsnog odziva: pokazuju reakciju date promenljive tokom vremena na neočekivanu promenu slučajne komponente druge izabrane promenjive.
- Na primer, može se proceniti efekat
  - neanticipiranog porasta ponude novca na kretanje cena i proizvodnje
  - neanticipirane promene deviznog kursa na kretanje cena.
  - Time se mogu analizirati efekti ekonomske politike.

3. Dekompozicija varijanse greške predviđanja

- VAR modelom se ne opisuju tekući uticaji promenljivih. Ukoliko postoje, onda su oni obuhvaćeni delom modela koji ne objašnjava sistematske uticaje. To su reziduali.
- Tekući odnosi mogu se razmatrati prema korelacionoj strukturi reziduala svih jednačina, koji su zbirno predstavljeni kovarijacionom matricom reziduala.
- Na osnovu ove matrice i vektorske forme pokretnih sredina može se zaključiti koliko u ukupnom varijabilitetu neočekivane promene jedne promenljive učestvuje varijabilitet ostalih.
- Takođe se može pratiti promena njihovog relativnog udela tokom vremena.
- Time posredno zaključujemo kakvi su strukturni odnosi u datom ekonomskom sistemu.

Neke metodološke dileme

1. Ukoliko postoji greška specifikacije -iz modela izostavljena relevantna promenljiva, onda se njen uticaj manifestuje kroz reziduale, koji tada daju iskrivljenu sliku strukturnih odnosa.
2. Funkcija impulsnog odziva treba da prikaže efekat koji slučajni šok na jednu promenljivu ima na sve promenljive u sistemu. Kako postoji interakcija između slučajnih komponenti svih jednačina, potrebno ih je prethodno transformisati da bi se obezbedila njihova nezavisnost. Ali, tada se može postaviti pitanje ekonomske interpretacije tako transformisanog slučajnog šoka.
3. Međusobna interakcija svih promenljivih u sistemu otvara problem izbora njihovog redosleda. Potrebno je odabrati redosled koji najpreciznije odslikava prirodu ekonomskih odnosa. Ovaj problem se rešava variranjem redosleda jednačina VAR-a i prethodnom primenom testa uzročnosti.

Status VAR modela danas

- I pored navedenih metodoloških dilema, VAR modeliranje se koristi u mnogim makroekonomskim istraživanjima.
- Počev od pionirskog rada Simsa, 1980. godine, pa do danas, ovaj koncept je jedan od najzastupljenijih u ekonometrijskom modeliranju.
- Sims je dobio Nobelovu nagradu za ekonomiju 2011. godine upravo za rezultate bazirane na primeni VAR modeliranja.

http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2011/sims-lecture.html

Postavka VAR modela: VAR model dimenzije dva i reda jedan

$$x_t = a_{11} x_{t-1} + a_{12} y_{t-1} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_t = a_{21} x_{t-1} + a_{22} y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \quad E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}'\right) = \begin{cases} \Sigma, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} E\left(\varepsilon_{1t}^2\right) & E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) \\ E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) & E\left(\varepsilon_{2t}^2\right) \end{bmatrix}$$

Postavka VAR modela: VAR model dimenzije dva i reda dva

$$x_t = a_{11}x_{t-1} + b_{11}x_{t-2} + a_{12}y_{t-1} + b_{12}y_{t-2} + \varepsilon_{1t}$$
$$y_t = a_{21}x_{t-1} + b_{21}x_{t-2} + a_{22}y_{t-1} + b_{22}y_{t-2} + \varepsilon_{2t}$$

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{t-2} \\ y_{t-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix}$$

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \Phi_2 = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_t = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \end{bmatrix} \qquad E\left(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}'\right) = \begin{cases} \Sigma, k = 0 \\ 0, k \neq 0 \end{cases} \qquad \Sigma = \begin{bmatrix} E\left(\varepsilon_{1t}^2\right) & E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) \\ E\left(\varepsilon_{1t}\varepsilon_{2t}\right) & E\left(\varepsilon_{2t}^2\right) \end{bmatrix}$$

Postavka VAR modela: VAR model dimenzije n i reda p

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + \varepsilon_t$$

Y_t – vektorska vremenska serija, $n \times 1$,

ε_t – vektorski beli šum, $n \times 1$, slucajna greska modela

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ – matrice parametara $n \times n$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s') = \begin{cases} \Sigma, s = t, n \times n, \text{ kovarijacona matrica} \\ 0, \text{ostalo} \end{cases}$$

Specifikacija VAR modela

- Pitanja:

1. Koje determinističke komponente uključiti u model?
2. Koliki je red modela?
3. Šta raditi u slučaju kada komponente vektorske vremenske serije poseduju jedinični koren?

1. <u>Determinističke komponente</u>

- VAR model može sadržati sve ili neke od sledećih komponenti:
  - konstanta
  - linearni trend
  - sezonske veštačke promenljive i
  - veštačke promenljive kojima se modelira prisustvo nestandardnih opservacija.

2. Red VAR modela

- Red VAR modela, u opštem slučaju p, u praktičnom radu je nepoznat.
- Odabrani red treba da je konzistentan sa raspoloživim podacima: modeliranje koje isključuje postojanje autokorelacije.
- Veći red modela od optimalnog drastično povećava broj parametara za ocenjivanje. To dovodi u pitanje princip ekonomičnosti kojim se favorizuje jednostavnost u modeliranju.
- Izbor optimalnog reda p zasniva se na primeni sledećih metoda:
  - Sekvencijalna strategija testiranja značajnosti pojedinih docnji
    - Sledeće predavanje
  - Višedimenzioni informacioni kriterijumi
  - Testiranje postojanja autokorelacije
  - Testiranje normalnosti slučajne greške modela

Višedimenzioni informacioni kriterijumi

- Optimalan broj docnji jeste ona vrednost **p** kojom se minimizira funkcija IC(p)

$$AIC = \ln\left|\text{Ocena kov. matrice reziduala}\right| + 2\frac{\overbrace{\left(n^2 p\right)}^{\text{ukupan broj parametara sistema}}}{T}$$

$$SC = \ln\left|\text{Ocena kov. matrice reziduala}\right| + \left(\ln(T)\right)\frac{\left(n^2 p\right)}{T}$$

$$HQIC = \ln\left|\text{Ocena kov. matrice reziduala}\right| + \left(2\ln\ln(T)\right)\frac{\left(n^2 p\right)}{T}$$

- Akaikeov, Švarcov i Hana-Kvinov
- Primena ima smisla jedino ako su reziduali VAR modela neautokorelisani sa aproksimativno normalnom raspodelom.

Testiranje postojanja autokorelacije I

- Pojedinačna analiza reziduala svake jednačine
  - Analiza korelacionih koeficijenata reziduala svake jednačine
  - Analiza unakrsnih korelacionih koeficijenata iz svake dve jednačine
    - Obe analize sprovode se za rastuće docnje
- Zbirna analiza reziduala u celom VAR modelu
  - Višedimenzioni BG (Brojš-Godfrijev) test
  - Višedimenzioni BLj (Boks-Ljungov) test

Testiranje postojanja autokorelacije II Višedimenzioni BLj test

- Nulta hipoteza: ne postoji, kako autokorelacija kod individualnih komponenti vektorske vremenske serije, tako i unakrsna korelacija između tih komponenti. Alternativnom hipotezom se sugeriše suprotno.
- Oznaka statistike za testiranje zbirne autokorelacije i unakrsne korelacije reda h u VAR modelu sa n jednačina: $Q_n(h)$
- Ako je tačna nulta hipoteza ova test-statistika poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa $n^2(h-p)$ stepeni slobode.
- Dati broj stepeni slobode predstavlja razliku između broja ocenjenih elemenata matrica koje sadrže korelacione koeficijente (n^2h) i broja parametara VAR(p) modela dimenzije n (n^2p).
- Test ima smisla koristiti za ispitivanje postojanja autokorelacije čiji je red veći od reda VAR modela (za h>p).

Testiranje normalnosti slučajne greške modela I

•Postoji više testova čijom primenom se proverava da li je slučajna greška VAR modela normalno raspodeljena:

- Lutkepolov (engl. Lutkepohl) test
- Dornik-Hansenov (engl. Doornik-Hansen) test.

•Oba testa zasnivaju se na JB testu normalnosti, kojim se ispituje da li treći i četvrti centalni moment date serije reziduala odgovaraju korespondirajućim momentima normalne raspodele.

• U okviru VAR modela neophodno je obrazovati međusobno nekorelisane serije reziduala.

•Za tako transformisane serije reziduala računa se, prvo, jednodimenziona JB test-statistika. Potom se dobijene individualne vrednosti sabiraju, što daje višedimenzionu verziju test-statistike normalnosti.

Testiranje normalnosti slučajne greške modela II

•Pri tačnoj nultoj hipoteze o normalnosti obe višedimenzione test-statistike normalnosti poseduju asimptotski χ^2 raspodelu sa brojem stepeni slobode 2*n, gde je n broj jednačina VAR modela , budući da se dobijaju kao zbir od n slučajnih promenljivih, od kojih svaka ima χ^2 raspodelu sa *2* stepena slobode.

• Lutkepolov test je osetljiv na promenu redosleda jednačina VAR modela, dok je Dornik-Hansenov test invarijantan u odnosu na taj redosled.

• U praksi se ostvaruje dodatna korekcija Dornik-Hansenove test-statistike kako bi se obezbedila preciznija aproksimacija χ^2 raspodelom. Ova korekcija prisutna je i u programskom paketu EVIEWS, s tim što različite verzije paketa ne daju istovetne rezultate.

3. Šta raditi u slučaju kada komponente vektorske vremenske serije poseduju jedinični koren?

- Ukoliko postoji jedinični koren u sistemu VAR modela, tada razlikujemo sledeće dve situacije:
  - Vremenske serije nisu kointegrisane
  - Vremenske serije jesu kointegrisane.
- Ako vremenske serije sa jediničnim korenom nisu kointegrisane, onda se njihova analiza ostvaruje na osnovu VAR modela prvih diferenci.
- Međutim, postojanje kointegracije omogućava da se vremenske serije sa jediničnim korenom razmatraju u okviru VAR modela, a da se prethodno ne transformišu primenom operatora diferenciranja.
  - Kointegrisane vremenske serije poseduju adekvatnu reprezentaciju u formi polaznog VAR modela. Upravo to omogućava njegovu upotrebu i kada serije individualno nisu stacionarne.